

GUIA 5: **Producto cruz. Recta y plano en \mathbb{R}^3**

1. Sea $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, -3)$, y $\vec{w} = (2, 6, 7)$. Calcule

- (a) $\vec{v} \times \vec{w}$ (c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (e) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$
(b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (f) $(\vec{u} \times \vec{w}) - 2\vec{w}$

2. Encuentre un vector ortogonal a \vec{u} y \vec{v} .

- (a) $\vec{u} = (-6, 4, 2)$, $\vec{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\vec{u} = (-2, 1, 5)$, $\vec{v} = (3, 0, -3)$.

3. Supongamos que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 3$. Encuentre

- (a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$ (c) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (e) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$
(b) $(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$ (d) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$ (f) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{w})$

4. Encuentre todos los vectores unitarios paralelos al el plano yz que son perpendiculares al vector $(3, -1, 2)$.

5. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto P y tiene a \vec{n} como normal.

- (a) $P(-1, 3, -2)$; $\vec{n} = (-2, 1, -1)$ (c) $P(2, 0, 0)$; $\vec{n} = (0, 0, 2)$
(b) $P(1, 1, 4)$; $\vec{n} = (1, 9, 8)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\vec{n} = (1, 2, 3)$

6. Determine si los planos son paralelos.

- (a) $4x - y + 2z = 5$ y $7x - 3y + 4z = 8$.
(b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ y $3x - 12y - 9z - 7 = 0$.
(c) $2y - 4z + 5$ y $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$.

7. Determine si la recta y el plano son paralelos.

- (a) $x = -5 - 4t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + 2t$; $x + 2y + 3z - 9 = 0$.
(b) $x = 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 - t$; $4x - y + 2z = 1$.

8. Determine si los planos son perpendiculares.

- (a) $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$
(b) $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$

9. Demuestre que la recta

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= t \quad -\infty < t < +\infty \\z &= t\end{aligned}$$

- (a) está en el plano $6x + 4y - 4z = 0$,
 (b) es paralelo al plano $5x - 3y + 3z = 1$,
 (c) es paralelo al plano $6x + 2y - 2z = 3$.

10. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $(-2, 1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 4 = 2t$, $y + 2 = 3t$, $z = -5t$.

11. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -6, 7)$ y es paralelo al plano $5x - 2y + z - 5 = 0$.

12. Encuentre el punto de intersección de la recta

$$x - 9 = -5t$$

$$y + 1 = -t$$

$$z - 3 = t$$

y el plano $2x - 3y + 4z + 7 = 0$.

13. Encuentre la ecuación del plano que contiene la recta $x = -1 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = 2 - t$ y es perpendicular a la recta $2x - 4y + 2z = 9$.

14. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ y contiene la recta de intersección de los planos $x - y - 4z = 2$ y $-2x + y + 2z = 3$.

15. Demuestre que los puntos $(-1, -2, -3)$, $(-2, 0, 1)$, $(-4, -1, -1)$ y $(2, 0, 1)$ están en un mismo plano.

16. Demuestre que las rectas

$$x = 3 - 2t \quad x = 5 + 2t$$

$$y = 4 + t \quad y = 1 - t$$

$$z = 1 - t \quad z = 7 + t$$

son paralelos, y encuentre el plano que ellos determinen.

17. Encuentre una ecuación del plano que contiene al punto $(1, -1, 2)$ y la recta $x = t$, $y = t + 1$, $z = -3 + 2t$.

Respuestas.

1. (a) $(32, -6, -4)$ (c) $(27, 40, -42)$ (e) $(-44, 55, -22)$
 (b) $(-14, -20, -82)$ (d) $(0, 176, -264)$ (f) $(-8, -3, -8)$
2. (a) $(18, 36, -18)$, (b) $(-3, 9, -3)$; 3. (a) -3 , (b) 3 , (c) 3 , (d) -3 , (e) -3 , (f) 0 .
4. $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ y el vector paralelo unitario es $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$
5. (a) $-2(x + 1) + (y - 3) - (z + 2) = 0$; (b) $(x - 1) + (y - 3) - (z + 2) = 0$, (c) $2z = 0$, (d) $x + 2y + 3z = 0$.
6. (a) No son paralelos, (b) paralelos, (c) paralelos. 7. (a) paralelos, (b) no paralelos.
8. (a) No, (b) sí. 10. $2x + 3y - 5z + 36 = 0$. 11. $5x - 2y + x - 34 = 0$.
12. $(-\frac{173}{3}, -\frac{43}{3}, \frac{49}{3})$. 13. $y + 2z - 9 = 0$. 14. $x - y - 4z - 2 = 0$. 16. $3x + 10y + 4z - 53 = 0$.
17. $3x - y - z - 2 = 0$.